第5回: ポアソン分布(1回目)

まず、どんな分布か…

●稀事象が一定時間当たりに起きる回数 x が従う分布:ポアソン分布 (Poisson Distribution)

● x は、生起回数なので、0以上の整数値 $x=0,1,2,\ldots$ をとる。稀事象というからには主に小さい値をとるわけだが、原理的には上限はない。

●前回まで勉強した二項分布のある極限でもある。

ポアソン分布に従ういくつかの実例

- 1日当たりの交通事故死亡者数

稀事象:東京都内の死者、H19年269名、H18年263名、H17年289名、H16年303名 人口H20.4.1 12,838,856人

(滋賀県内では、H19年 93名、H18年 102名、H17年 118名、H16年104名、H15年 108名、H14年 109名)人口H20.3.1 1,396,478人

人口比で考えると、各人が死亡するのは稀といえる

- ウランやラジウムなどの放射性原子の核が、単位時間当たりに崩壊する数
- はやらない銀行の窓口へ、1時間当たりにやって来るお客さんの数

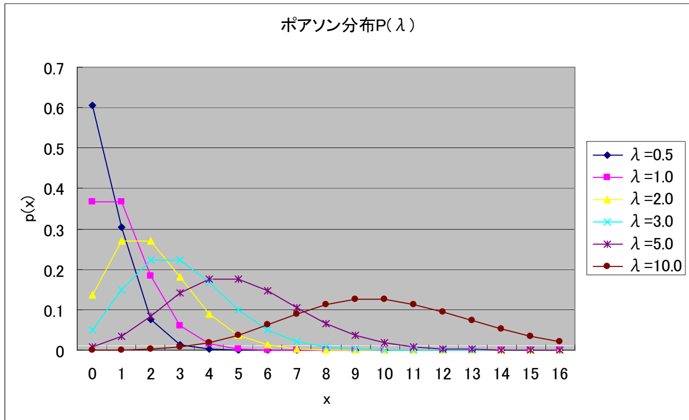
比較:お客さんが来る時間間隔 t は、指数分布に従う(らしい)と、2回目(4/17)に出てきた

- 空いている高速道路の料金所を、1分間に通過する自動車の台数

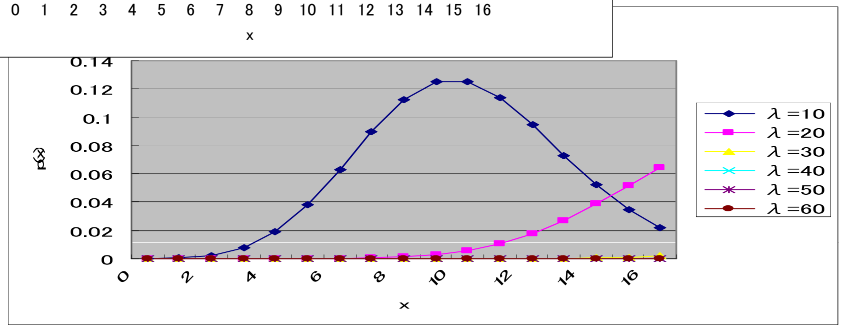
ポアソン分布の確率関数

$$p(x)=\frac{\lambda^x}{x!}\cdot e^{-\lambda},\quad x=0,1,2,\cdots$$

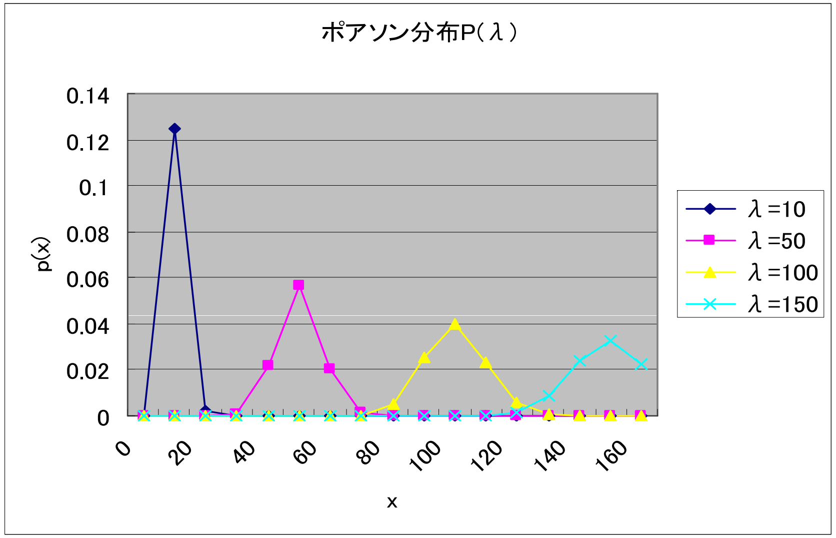
ただし、λは正の数。
ポアソン分布は、ただ1つのパラメータλで表される。P(λ)



ポアソン分布のグラフ



分布のグラフ(続)：さらに大きなλ値では…



確率分布が満たすべき2条件の確認

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, \quad x = 0,1,2,\cdots$$

- $p(x) \geq 0$
- $\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} = \left(\frac{1}{0!} + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \right) \cdot e^{-\lambda}$

$$= e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = 1$$

ここで、 $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

次ページの補足参照(1回生時に習った筈の「微分積分」を参照)

指数関数の展開公式(Taylor展開公式より)

$f(x) = e^x$ に対して、$x = 0 + \varepsilon$ (εは微小値) を、
$x = 0$ の周りで Taylor展開すると、

$$f(0+\varepsilon) = f(0) + \frac{\varepsilon}{1!} f'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(0) + \frac{\varepsilon^3}{3!} f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!} f^{(n)}(0) + \cdots$$

$f(x) = e^x$に対しては、$f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x, e^0 = 1$

$$\therefore f(\varepsilon) = e^{\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{1!} + \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^3}{3!} + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!} + \cdots$$

ポアソン分布の平均

$$\mu = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{\lambda \cdot \lambda^{x-1}}{x \cdot (x-1)!} \cdot e^{-\lambda}$$

パラメータλは平均値

$$= \underbrace{0 \times \frac{\lambda^0}{1} \cdot e^{-\lambda}}_{x=0} + \lambda \times \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$= \lambda \times \sum_{x'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x'}}{x'!} \cdot e^{-\lambda} \quad (x' = x-1 \text{とおくと} x' = 0, \ldots)$$

$$= \lambda \times \sum_{x=0}^{\infty} P(\lambda)(x)$$

$$\boxed{= \lambda}$$

ポアソン分布の分散

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot p(x) - \mu^2$$ ←復習

$$x^2 = x(x-1) + x$$ ←技巧（前回の二項分布のときと全く同じ）

$$\sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \{x(x-1)+x\} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \cdot \frac{\lambda^x}{x(x-1)\cdot(x-2)!} \cdot e^{-\lambda} + \mu$$

$$= \underbrace{0 \times (-1) \times \frac{\lambda^0}{1} \cdot e^{-\lambda}}_{x=0} + \underbrace{1 \times 0 \times \frac{\lambda^1}{1} \cdot e^{-\lambda}}_{x=1} + \lambda^2 \times \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \cdot e^{-\lambda} + \mu$$

$$= \underbrace{0}_{x=0,1} + \lambda^2 \times \sum_{x'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x'}}{x'!} \cdot e^{-\lambda} + \mu \quad (x' = x-2 \text{とおくと} x' = 0,\ldots)$$

$$\boxed{= \lambda^2 + \lambda}$$

ポアソン分布の分散（続き）

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2 \cdot p(x) - \mu^2, \quad \mu = \lambda$$

$$\sum_{x=0}^{n} x^2 \cdot p(x) = \lambda^2 + \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$\boxed{= \lambda}$$

パラメータλは分散でもある

二項分布の極限としてのポアソン分布

- 二項分布 $B(n,p)$ の平均と分散：

$$\mu = np, \quad \sigma^2 = np(1-p)$$

- ポアソン分布 $P(\lambda)$ の平均と分散：

$$\mu = \lambda, \quad \sigma^2 = \lambda$$

の両者を見比べて、もし仮に、

$$np \to \lambda, \quad p \to 0 \text{（よって、同時に} n \to \infty\text{）}$$

という極限を二項分布 $B(n,p)$で考えられれば、
それは、ポアソン分布$P(\lambda)$に一致する
かも知れない…

つまり、二項分布において、
積 $n \times p$ は、λに固定した状況のもとで、

- $p \to 0$　各試行では稀にしか起こらないこと

かつ

- $n \to \infty$　試行を無限回繰り返す

という極限を考えてみる。

例えば、ド・メレ氏が失敗した賭けより、さらに
サイコロの数を増やし、投げる回数を増やして、
サイコロ4個を864回振って、4個全て6の目となることが
少なくとも1回出る確率。二項分布 B$(864, 1/6^4)$

n=864, p=1/6^4, $n\,p$=2/3

二項分布が、ポアソン分布に近づくか？例1

- サイコロ1個を4回振って、6の目が出る
  $B(4,1/6),\quad n=4,\ p=1/6, np=2/3$
- サイコロ2個を24回振って、6のゾロメが出る
  $B(24,1/6^2),\quad n=24,\ p=1/6^2, np=24/36=2/3$
- サイコロ3個を144回振って、3個全てが6の目が出る
  $B(144,1/6^3),\quad n=144,\ p=1/6^3, np=144/6^3=2/3$
- サイコロ4個を864回振って、4個全てが6の目が出る
  $B(864,1/6^4),\quad n=864,\ p=1/6^4, np=864/6^4=2/3$
- …

$P(2/3)$ に近づくか？

ポアソン分布が二項分布のある極限であることの証明

- ある ⇔

$$np=\lambda\ (一定値)のままで、\quad p\to 0,\quad n\to\infty$$

教科書の第1の証明方法のみ（特性関数は取り上げなかったので、第2の証明方法も取り上げない）

$np=\lambda$ (一定値)のままで、$p\to 0,\quad n\to\infty$

$$B(n,p)(x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$=\frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}^{x個}}{x!}\cdot p^x(1-p)^{n-x}$$

$$=\frac{p^x}{x!}\cdot n^x\times\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{n^x}\times(1-p)^{n-x}$$

$$=\boxed{\frac{(np)^x}{x!}\times 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}\times(1-p)^{n-x}$$

$$\xrightarrow[np=\lambda,\,p\to 0,\,n\to\infty]{}\boxed{\frac{\lambda^x}{x!}}$$

証明続く

$np=\lambda$ (一定値)のままで、$p\to 0,\quad n\to\infty$

$$B(n,p)(x)$$

$$=\boxed{\frac{(np)^x}{x!}\times 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}\times(1-p)^{n-x}$$

$$(1-p)^{n-x}=\left(1-\frac{np}{n}\right)^{n\cdot\left(1-\frac{x}{n}\right)}\xrightarrow[np=\lambda,\,p\to 0,\,n\to\infty]{}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\left(-\frac{n}{\lambda}\right)\cdot(-\lambda)}=\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}^{(-\lambda)}=\boxed{e}^{-\lambda}$$

$$\therefore B(n,p)\xrightarrow[p\to 0,\,n\to\infty]{}\boxed{\frac{\lambda^x}{x!}}\cdot\boxed{e^{-\lambda}}=P(\lambda)$$

証明終わり

寄り道:自然対数の底　e　の2つの展開公式について

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = 2.718281828\ldots$$