第4回: 二項分布(2回目)

復習: 1回の試行(コイン投げ)では、2つの事象(表か裏か)のうちいずれかが、それぞれ pと$1-p$の確率で起こる。それを、n 試行繰り返し行ったとき、表が x 回出る確率:

$$p(x)=\binom{n}{x}\cdot p^x(1-p)^{n-x},\quad x=0,1,2,\cdots,n$$

2つのパラメータ n (自然数), p $(0<p<1)$

で表される。$x=0,1,2,\ldots,n$ の上で定義された

離散確率分布。$B(n, p)$ と書く。

復習: 二項分布の3つ目の例

まず、「サイコロ1個を振ったときに、1の目が出る確率は？」→ $p=1/6$

そこで、「サイコロ1個を30回振ったとき、1の目が出る回数は何回か？」

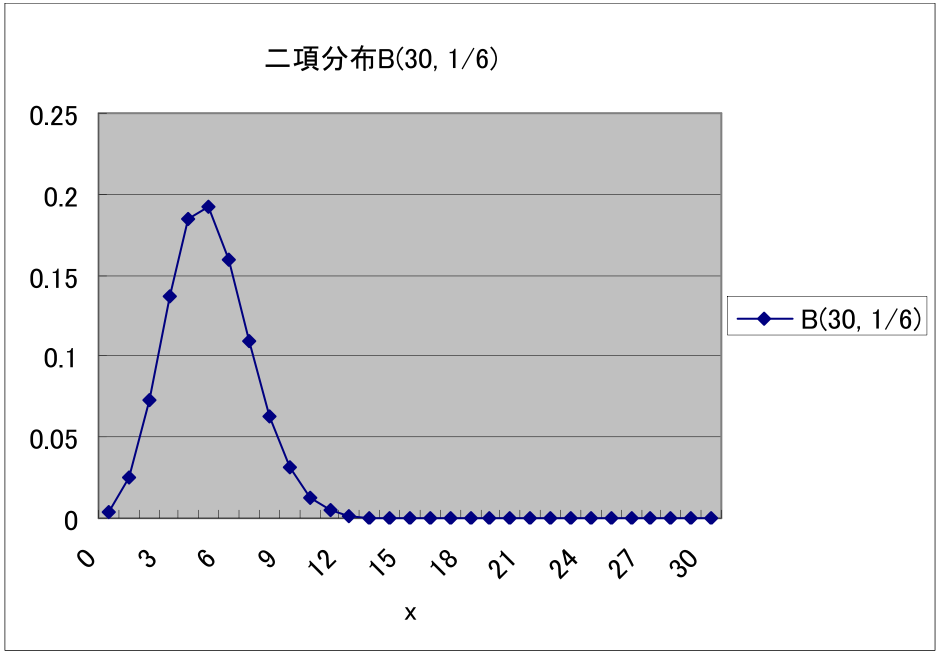
1の目が出る回数 $x=0,1,\ldots,30$: 確率変数

その確率分布 $p(x)=B\left(30,\frac{1}{6}\right)\qquad x=0,1,2,\cdots,30$

$$=\binom{30}{x}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^x\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{30-x}=\frac{5^{30-x}}{6^{30}}\cdot\binom{30}{x}$$

自分で電卓などを使って、おおよそのグラフを書いてみよう。

グラフを書いてみると…



二項分布の4つ目の例: メレ氏の失敗

サイコロ2個を24回振ったとき、6の「ゾロメ」(2つのサイコロとも6の目)が少なくとも1回出る確率は？ 確率分布は$B(24,1/36)$

$$1-p(0)=1-\binom{24}{0}\left(\frac{1}{36}\right)^0\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

$$=1-0.5085961\ldots=0.49140\ldots$$

となり、0. 5より小さい。

つまり、「少なくとも1回出るか、出ないか」のいずれかに賭けるならば、「出ない」確率の方がわずかに高い。

⇒ 「出る」に賭けた『フランス人貴族ド・メレ氏の失敗』

二項分布の平均と分散

その前に、まず復習:

●階乗

$$n! = n\cdot(n-1)\cdots 1,\quad 1! = 1,\ 0! = 1,$$

n の増加とともに、$n!$ は急速(指数関数的)に大きくなる。

$n!$ は、相異なるn 個のもの全てを、順に並べる並べ方の総数。n 個の順列の数。

●組み合わせの数

相異なるn 個の中からx 個を選び出す組み合わせの数。

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1}{x\cdot(x-1)\cdots 1\bullet(n-x)\cdots 1}$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-x+1)}{x\cdot(x-1)\cdots 1}$$

二項定理 関連事項

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x} a^x\, b^{n-x}$$

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n}$$

$a^x b^{n-x}$ という項は、全部でn 個ある( )のうち、x 個の( )からa を、残りのn-x 個の( )からb を選んだときに得られる。このような選び方の数は、「n 個からx 個を選ぶ組み合わせの数」なので、$\binom{n}{x}$

よって、$\binom{n}{x}$ を二項係数とも呼ぶ。

$$(a+b) = a+b$$

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

確率分布が満たすべき2条件の確認

- 二項分布を考えるときの重要な仮定は、

n 回繰り返し行う試行が、いずれも同一で互いに独立であること ⇔ ベルヌーイ試行という

$$p(x) = \binom{n}{x}\cdot p^x(1-p)^{n-x},\quad x = 0,1,2,\cdots,n$$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ p(x)\ge 0 \\ &\bullet\ \sum_{x=0}^{n} p(x) = 1 \end{aligned}\right\}\ \text{確率関数が満たすべき２式}$$

$$\because \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (p+(1-p))^n = 1^n = 1$$

さて、やっと…二項分布の平均

$$\mu=\sum_{x=0}^{n}x\cdot p(x)$$

$$=\sum_{x=0}^{n}x\cdot\frac{n!}{x!(n-x)!}\cdot p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}x\cdot\frac{n\cdot(n-1)!}{x\cdot(x-1)!(n-x)!}\cdot p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$=\underbrace{0\times p^{0}(1-p)^{n}}_{x=0}+n\times\sum_{x=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}\cdot p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$=\underbrace{0}_{x=0}+n\times p\times\sum_{x=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(x-1)!\big((n-1)-(x-1)\big)!}\cdot p^{x-1}(1-p)^{(n-1)-(x-1)}$$

$$=np\times\sum_{x'=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{x'!\big((n-1)-x'\big)!}\cdot p^{x'}(1-p)^{n-1-x'}\quad(x'=x-1とおくとx'=0,\dots,n-1)$$

$$=np\times\sum_{x=0}^{n-1}B(n-1,p)(x)$$

$$\boxed{=np}$$

毎回pの確率で生起することを、n回互いに独立な試行として繰り返す。よって合計の生起回数の平均は、

$p+p+p+\dots p=np$

同様にして…二項分布の分散

$\sigma^{2}=\sum_{x=0}^{n}x^{2}\cdot p(x)-\mu^{2}$ ←復習

$x^{2}=x(x-1)+x$ ←技巧

$$\sum_{x=0}^{n}x^{2}\cdot p(x)=\sum_{x=0}^{n}\{x(x-1)+x\}\cdot\frac{n!}{x!(n-x)!}\cdot p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}x(x-1)\cdot\frac{n(n-1)\cdot(n-2)!}{x(x-1)\cdot(x-2)!(n-x)!}\cdot p^{x}(1-p)^{n-x}+\mu$$

$$=\underbrace{0\times(-1)\times p^{0}(1-p)^{n}}_{x=0}+\underbrace{1\times0\times np(1-p)^{n-1}}_{x=1}+n(n-1)\times\sum_{x=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}\cdot p^{x}(1-p)^{n-x}+\mu$$

$$=\underbrace{0}_{x=0,1}+n(n-1)\times p^{2}\times\sum_{x=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(x-2)!\big((n-2)-(x-2)\big)!}\cdot p^{x-2}(1-p)^{(n-2)-(x-2)}+\mu$$

$$=n(n-1)p^{2}\times\sum_{x'=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{x'!\big((n-2)-x'\big)!}\cdot p^{x'}(1-p)^{n-2-x'}+\mu\quad(x'=x-2とおくとx'=0,\dots,n-2)$$

$$=n(n-1)p^{2}\times\sum_{x=0}^{n-2}B(n-2,p)(x)+\mu$$

$$=n(n-1)p^{2}+\mu$$

二項分布の分散(続き)

$$\sigma^{2}=\sum_{x=0}^{n}x^{2}\cdot p(x)-\mu^{2},\quad\mu=np$$

$$\sum_{x=0}^{n}x^{2}\cdot p(x)=n(n-1)p^{2}+\mu$$

$$\sigma^{2}=n(n-1)p^{2}+np-(np)^{2}$$

$$=np-np^{2}$$

$$\boxed{=np(1-p)}$$

前回の問題:以下の2つの確率を求めなさい。

問1:サイコロ1個を4回振ったとき、6の目が少なくとも1回出る確率を求めなさい。確率分布は$B(4,1/6)$

$$\rightarrow 1-p(0)=1-\binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{4}=1-0.482253086\ldots=0.51774\ldots>0.5$$

問2:サイコロ2個を24回振ったとき、6の「ゾロメ」が少なくとも1回出る確率を求めなさい。確率分布は$B(24,1/36)$

$$\rightarrow 1-p(0)=1-\binom{24}{0}\left(\frac{1}{36}\right)^{0}\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=1-0.5085961\ldots=0.49140\ldots<0.5$$

問3:出る回数の平均μ=$n\ p$ は、4 x 1/6 =24 x 1/36 =2/3 より2つの分布で等しい。しかし、「少なくとも1回出るか、出ないか」のいずれかに賭けるならば、問1は、「出る」確率の方が、問2は「出ない」確率の方が、いずれも差はわずかながら、高い。

⇒ パスカルとフェルマーが往復書簡で議論し、確率論の創始へ。