

## 第5回：ポアソン分布(1回目)

まず、どんな分布か...

● **稀事象が一定時間当たり起きる回数  $x$  が従う分布：ポアソン分布 (Poisson Distribution)**

●  $x$  は、生起回数なので、0以上の整数値  $x=0,1,2,\dots$  をとる。稀事象というからには主に小さい値をとるわけだが、原理的には上限はない。

● 前回まで勉強した**二項分布のある極限**でもある。

## ポアソン分布に従ういくつかの実例

● 1日当たりの交通事故死亡者数

稀事象：東京都内の死者、H19年269名、H18年263名、H17年289名、H16年303名 人口H20.4.1 12,838,856人

(滋賀県内では、H19年 93名、H18年 102名、H17年 118名、H16年 104名、H15年 108名、H14年 109名) 人口H20.3.1 1,396,478人

人口比で考えると、各人が死亡するのは稀といえる

● ウランやラジウムなどの放射性原子の核が、単位時間当たりに崩壊する数

● はやらない銀行の窓口へ、1時間当たりにやって来るお客さんの数

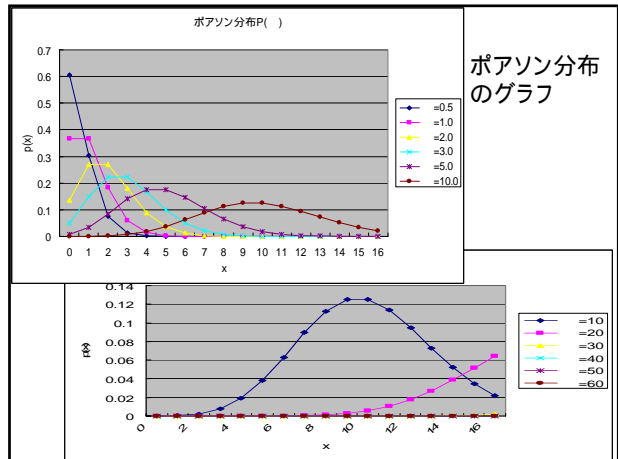
比較：お客さんが来る時間間隔  $t$  は、指数分布に従う(らしい)と、2回目(4/16)に出てきた

● 空いている高速道路の料金所を、1分間に通過する自動車の台数

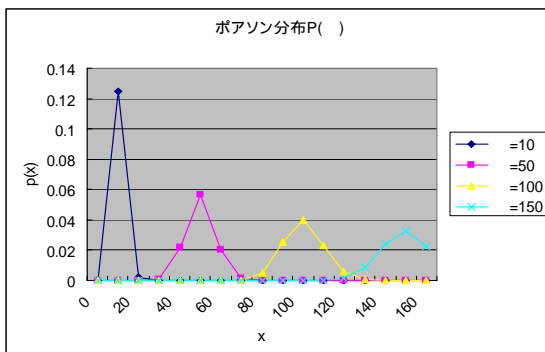
## ポアソン分布の確率関数

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

ただし、 $\lambda$  は正の数。  
ポアソン分布は、ただ1つのパラメータ  $\lambda$  で表される。  $P(\lambda)$



分布のグラフ(続)：さらに大きな  $\lambda$  値では...



## 確率分布が満たすべき2条件の確認

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$p(x) \geq 0$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} = \left( \frac{1}{0!} + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots \right) \cdot e^{-\lambda} = e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = 1$$

ここで、 $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

次ページの補足参照(1回生時に習った筈の「微分積分」を参照)

### 指数関数の展開公式 (Taylor展開公式より)

$f(x) = e^x$  に対して、 $x=0+\varepsilon$  ( $\varepsilon$ は微小値) を、  
 $x=0$  の周りで Taylor展開すると、

$$f(0+\varepsilon) = f(0) + \frac{\varepsilon}{1!} f'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(0) + \frac{\varepsilon^3}{3!} f^{(3)}(0) + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

$f(x) = e^x$  に対しては、 $f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x, e^0 = 1$

$$\therefore f(\varepsilon) = e^\varepsilon = 1 + \frac{\varepsilon}{1!} + \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^3}{3!} + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} + \dots$$

### ポアソン分布の平均

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p(x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} && \text{パラメータ は平均値} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda \cdot \lambda^{x-1}}{x \cdot (x-1)!} \cdot e^{-\lambda} \\ &= 0 \times \underbrace{\frac{\lambda^0}{1}}_{=1} \cdot e^{-\lambda} + \lambda \times \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \cdot e^{-\lambda} \\ &= \lambda \times \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} \quad (x'=x-1 \text{とおく} \text{と} x'=0, \dots) \\ &= \lambda \times \sum_{x=0}^{\infty} P(\lambda)(x) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

### ポアソン分布の分散

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot p(x) - \mu^2 \quad \text{復習}$$

$$x^2 = x(x-1) + x \quad \text{技巧 (前回の二項分布のときと全く同じ)}$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot p(x) &= \sum_{x=0}^{\infty} \{x(x-1) + x\} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \cdot \frac{\lambda^x}{x(x-1) \cdot (x-2)!} \cdot e^{-\lambda} + \mu \\ &= 0 \times (-1) \times \frac{\lambda^0}{1} \cdot e^{-\lambda} + 1 \times 0 \times \frac{\lambda^1}{1} \cdot e^{-\lambda} + \lambda^2 \times \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \cdot e^{-\lambda} + \mu \\ &= 0 + \lambda^2 \times \sum_{x=0,1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} + \mu \quad (x'=x-2 \text{とおく} \text{と} x'=0, \dots) \\ &= \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

### ポアソン分布の分散 (続き)

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot p(x) - \mu^2, \quad \mu = \lambda$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot p(x) = \lambda^2 + \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

パラメータ は分散でもある

### 二項分布の極限としてのポアソン分布

- 二項分布  $B(n, p)$  の平均と分散:  
 $\mu = np, \quad \sigma^2 = np(1-p)$
- ポアソン分布  $P(\lambda)$  の平均と分散:  
 $\mu = \lambda, \quad \sigma^2 = \lambda$

の両者を見比べて、もし仮に、

$np \rightarrow \lambda, \quad p \rightarrow 0$  (よって、同時に  $n \rightarrow \infty$ )  
という極限を二項分布  $B(n, p)$  で考えられれば、  
それは、ポアソン分布  $P(\lambda)$  に一致する  
かも知れない...

つまり、二項分布において、

積  $n \times p$  は、に固定した状況のもとで、

- $p \rightarrow 0$  各試行では稀にしか起こらないこと  
かつ
- $n \rightarrow \infty$  試行を無限回繰り返す  
という極限を考えてみる。

例えば、ド・モレ氏が失敗した賭けより、さらに  
サイコロの数を増やし、投げる回数を増やして、  
サイコロ4個を864回振って、4個全て6の目となることが  
少なくとも1回出る確率。二項分布  $B(864, 1/6^4)$

$$n=864, \quad p=1/6^4, \quad np=2/3$$

### 二項分布が、ポアソン分布に近づくか？例1

- サイコロ1個を4回振って、6の目が出る  
 $B(4, 1/6)$ ,  $n=4, p=1/6, np=2/3$
- サイコロ2個を24回振って、6のゾロメが出る  
 $B(24, 1/6^2)$ ,  $n=24, p=1/6^2, np=24/36=2/3$
- サイコロ3個を144回振って、3個全てが6の目が出る  
 $B(144, 1/6^3)$ ,  $n=144, p=1/6^3, np=144/6^3=2/3$
- サイコロ4個を864回振って、4個全てが6の目が出る  
 $B(864, 1/6^4)$ ,  $n=864, p=1/6^4, np=864/6^4=2/3$
- ...

$P(2/3)$  に近づくか？

### ポアソン分布が二項分布のある極限であることの証明

- ある

$$np = \lambda \text{ (一定値) のままで、}$$

$$p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

教科書の第1の証明方法のみ(特性関数は取り上げなかったため、第2の証明方法も取り上げない)

$$np = \lambda \text{ (一定値) のままで、 } p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$B(n, p)(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}^{x\text{個}}}{x!} \cdot p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{p^x}{x!} \cdot n^x \times \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{n^x} \times (1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{(np)^x}{x!} \times 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \times (1-p)^{n-x}$$

$$\xrightarrow{np=\lambda, p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

証明続く

$$np = \lambda \text{ (一定値) のままで、 } p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$B(n, p)(x) = \frac{(np)^x}{x!} \times 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \times (1-p)^{n-x}$$

$$(1-p)^{n-x} = \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{n \left(1 - \frac{x}{n}\right)} \xrightarrow{np=\lambda, p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\left(\frac{n}{\lambda}\right) \cdot (-\lambda)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n(-\lambda)} = e^{-\lambda}$$

$$\therefore B(n, p) \xrightarrow{p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = P(\lambda)$$

証明終わり

### 寄り道: 自然対数の底 $e$ の2つの展開式について

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$e = 2.718281828\dots$

