第8回：正規分布（3回目）

正規分布の応用あれこれ①

① 二項分布の近似としての正規分布

二項分布 $B(n,p)$は、nが大きく、$p≒1/2$

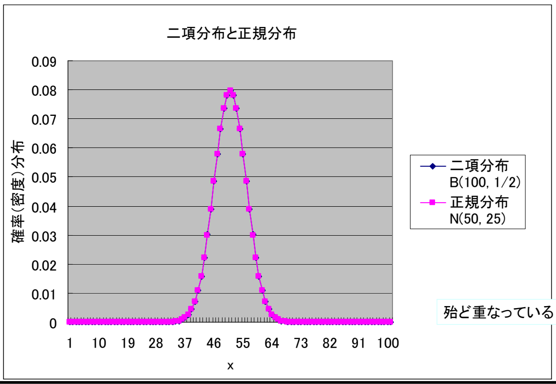
のときに、平均と分散の値が同じである

正規分布$N(\mu=np, \sigma^2=np(1-p))$ に近い。

（証明には、特性関数を用いるのが適当なので、ここでは行わない）

⇒ 正規分布の方が（二項分布よりも）、取り扱いがラク。よって、二項分布の計算を正規分布で代用しよう。

二項分布と正規分布



例題5.3：二項分布の例題3.2を、正規分布で近似することで、ラクに解いてみる

例題3.2：サイコロ2個を10回振るとき、丁（和が偶数）となる回数は x は、二項分布$B(10, ½)$に従う。このとき、確率$P_b\{x=4\text{or}5\text{or}6\}$の値を求めたい。

$$p(x=4)+p(x=5)+p(x=6)$$

$$=\binom{10}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{10-4}+\binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^{10-5}+\binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^{10-6}$$

$$=\left(\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}+\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}+\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$=(210+252+210)/2^{10}$$

$$=21/32=\boxed{0.65625}$$

例題5.3（続き）

- いま、$p=1/2$であり、$n=10$とある程度大きいので、同じ平均値$np=5$, 分散値$np(1-p)=2.5$をもつ正規分布$N(5, 5/2)$で代用することを考える。
- この正規分布で、$x\in[3.5,6.5]$なる幅3の区間の値をとる確率は、

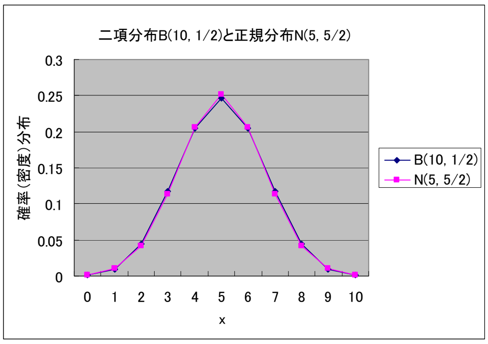
$$p\{3.5\le x\le 6.5\}=N(0,1)\left\{\frac{3.5-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\le\frac{6.5-\mu}{\sigma}\right\}, \mu=5, \sigma^2=2.5$$

$$=N(0,1)\left\{-\frac{1.5}{\sqrt{2.5}}\le u\le\frac{1.5}{\sqrt{2.5}}\right\}$$

$$=2\times N(0,1)\{0\le u\le 0.9486...\}$$

$$=2\times(0.5-0.1714)=\boxed{0.6572}$$

例題5.3（続き）：確率（密度）分布のグラフで両者を比較すると



例題5.3-2：二項分布の例題3.3を、正規分布で近似することで、ラクに解いてみる

例題3.3：サイコロ1個を30回振るとき、1の目が出る回数 x は、二項分布$B(30, 1/6)$に従う。このとき、確率$P_b\{x\leqq5\}$の値を求めたい。

$$p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)+p(x=4)+p(x=5)$$

$$=\binom{30}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{30-0}+\binom{30}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{30-1}+\binom{30}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{30-2}+\cdots$$

$$=\left(1+30\cdot\frac{1}{5}+\frac{30\cdot29}{2}\cdot\frac{1}{5^2}+\frac{30\cdot29\cdot28}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{30\cdot29\cdot28\cdot27}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{5^4}+\frac{30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{5^5}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{30}$$

$$=(1+6+...)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{30}$$

$$=\boxed{0.6164470...}$$

例題5.3-2:(続き)

- いま、$p=1/6$だが、$n=30$とある程度大きいので、同じ平均値$np=5$, 分散値$np(1-p)=25/6$をもつ
  正規分布$N(5, 25/6)$で代用することを考える。
- この正規分布で、$x\in[-\infty,5.5]$なる値をとる確率は、

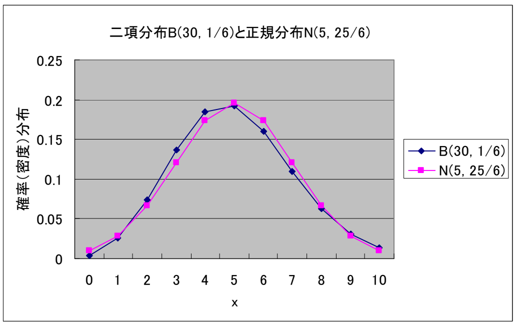
$$p\{x\le 5.5\}=N(0,1)\left\{\frac{x-\mu}{\sigma}\le\frac{5.5-\mu}{\sigma}\right\},\mu=5,\sigma^2=25/6$$

$$=N(0,1)\left\{u\le\frac{0.5}{5\sqrt{1/6}}\right\}$$

$$=0.5+N(0,1)\{0\le u\le 0.244948...\}$$

$$=0.5+(0.5-0.4033)=\boxed{0.5967}$$

例題5.3-2(続き):確率(密度)分布のグラフで両者を比較すると



正規分布の応用あれこれ②

② 微分方程式(拡散方程式)の解としての正規分布

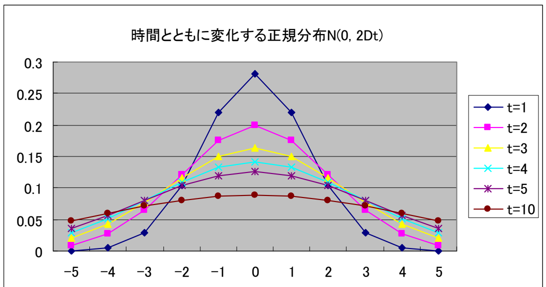
時間とともに分散が大きくなっていくような正規分布$N(0, 2Dt)$ に従う確率変数 x

(平均μは0のまま、分散が時刻 t に比例$\sigma^2=2Dt$)

⇔ 確率密度関数

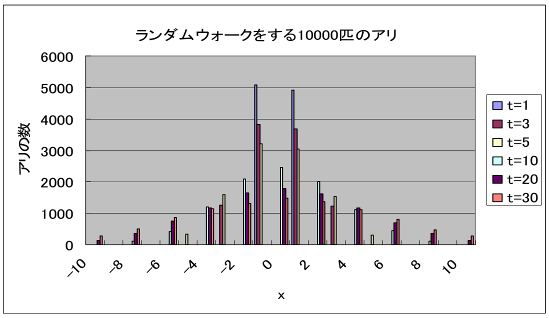
$$P(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

$N(0, 2Dt)$のグラフ



係数 D=1

もし、10000匹のアリが時刻t=0にx=0で一斉に左右に1ずつ(±1)のランダムウォークをはじめると…



$P(x,t)$が拡散方程式を満たすこと

$$P(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

が、拡散方程式(熱伝導方程式)

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}\quad(t>0)$$

を満たすことは、(D:拡散係数)

$$\frac{\partial P}{\partial t}=-\frac{1}{2t}P-\frac{(-x^2)}{4Dt^2}P,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2x}{4Dt}P\right)=-\frac{1}{2Dt}P+\left(-\frac{x}{2Dt}\right)^2 P$$

より確認できる。