第6回: ポアソン分布(2回目)

ポアソン分布の確率関数

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, \quad x = 0,1,2,\cdots$$

ただし、λは正の数。
ポアソン分布は、ただ1つのパラメータλで表される。P(λ)

二項分布 → ポアソン分布
B(n , p)　　　P(λ)

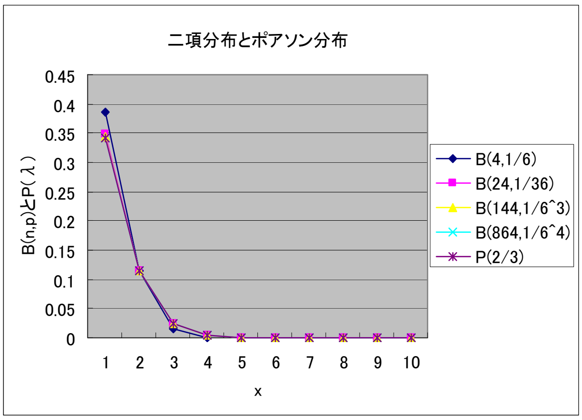
$np = \lambda$ (一定値)のままで、$p \to 0, n \to \infty$

$$B(n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \longrightarrow P(\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

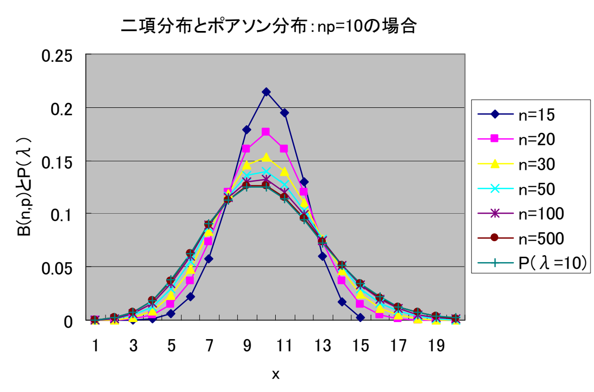
を、実際に分布のグラフを書いて確認してみよう。

$$P(\lambda)(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, \quad x = 0,1,2,\cdots$$

λは正の数



例2:教科書の図4.3の分布 $np = \lambda = 10$



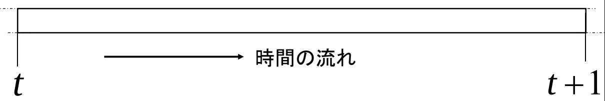
指数分布の裏としてのポアソン分布

- がら空きの銀行窓口へのお客さんの到着、
- 交通量の少ない道路での車の通過、
- 放射性元素の原子核の崩壊、
- 交通事故にあって死亡、

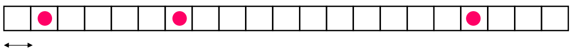
など、個々のお客さん、車両、原子、市民には
稀にしか起こらない事象があり、それぞれは
互いに独立に起きるとき⇒
その時間間隔 t は指数分布
その単位時間当たりの生起数 x はポアソン分布

簡単なモデルで理解してみよう

単位時間(1 時間、日、秒、…)



それを頭の中でN等分してみる。ここで、Nは十分大きな数



$1/N$:十分短い時間間隔

● ← 稀に、互いに独立に生起する事象

モデルで理解(続き1:モデルの説明)

- いま、単位時間当たりに平均λ回起こる事象だとすると、$1/N$ の間に起こる確率pは、$p=\lambda/N$
- ごく短い時間間隔$1/N$ の間に起こる確率p は たいへん小さく、1つの □ に2つ以上の ● が同時に起こることはないとする(そのように、Nを十分大きくとる)。
- このとき、1つの □ には、● が生じるか生じないか、のいずれかがpと$1-p$の確率で起きる。N個の異なる □ では、互いに独立にそのいずれかが起きる。

⇒これは…

モデルで理解(続き2:生起数はポアソン分布)

⇒全N個の □(=単位時間)で x 個の ●が生じる確率は、二項分布 $B(N, p)$で与えられる。

$Np = \lambda$, N は十分大きい、pは小さい

⇒ ポアソン分布 $P(\lambda)$

つまり、単位時間当たりに事象● がx回生起する確率は、ポアソン分布(λ)で与えられることがわかった。

モデルで理解(続き3:生起間隔は指数分布)

⇒また、時間間隔 t の確率密度分布$f(t)$は、次のように考えればよい。x 個離れた □ で初めて次の●が生じる確率は

$p=\lambda/N$ による幾何分布 $P_{幾何}(x)=(1-p)^{x-1}p$

で与えられる。(幾何分布:テキストp.13)

時間に直すには、$t=x/N$ とすればよく、

$P_{幾何}(x) \rightarrow f(t)\,dt$ ($Np=\lambda$, $N\to\infty$)

$$f(t)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{Nt-1}\frac{\lambda}{N}\cdot N=\lambda e^{-\lambda t}$$ 指数分布

復習:2回目(4/18) テキストp.20
例題2.4:[3]指数分布での平均と分散

指数分布 $f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & (t\ge 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$ に対して、

$\mu=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx$ と $\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot f(x)dx$ を計算する

$$\Rightarrow \mu=\frac{1}{\lambda},\quad \sigma^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

時間間隔 t の平均は $1/\lambda$