

第5回：ポアソン分布(1回目)

まず、どんな分布か...

●稀事象が一定時間あたりに起きる回数 x が従う分布: **ポアソン分布** (Poisson Distribution)

● x は、生起回数なので、0以上の整数値 $x=0,1,2,\dots$ をとる。稀事象というからには主に小さい値をとるわけだが、原理的には上限はない。

● 前回まで勉強した二項分布のある極限でもある。

ポアソン分布に従ういくつかの実例

- 1日当たりの交通事故死亡者数
人口比で考えると、各人が死亡するのは稀といえる
- ウランやラジウムなどの放射性原子の核が、単位時間あたりに崩壊する数
- はやらない銀行の窓口へ、1時間あたりにやって来るお客さんの数

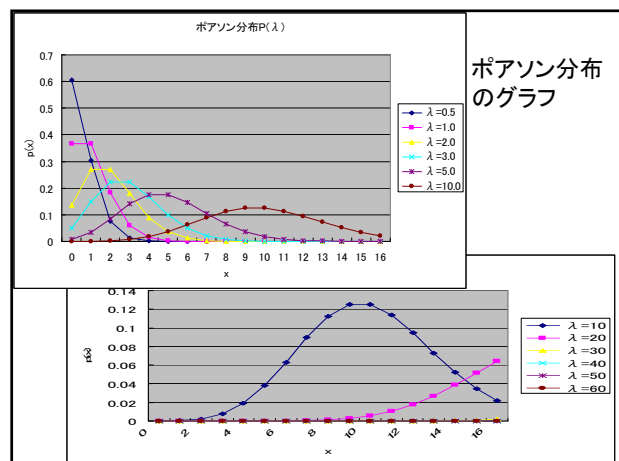
比較: お客さんが来る時間間隔 t は、指数分布に従う(らしい)と、2回目(4/18)に出てきた

- 空いている高速道路の料金所を、1分間に通過する自動車の台数

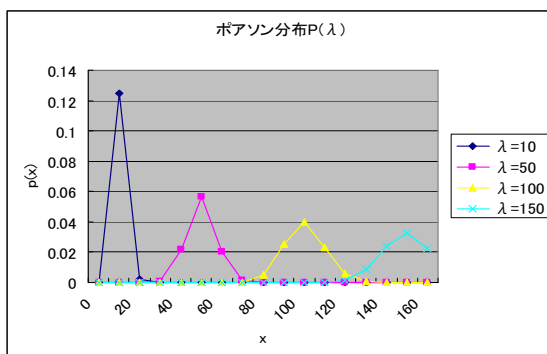
ポアソン分布の確率関数

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

ただし、 λ は正の数。
ポアソン分布は、ただ1つのパラメータ λ で表される。 $P(\lambda)$



分布のグラフ(続): さらに大きな λ 値では...



確率分布が満たすべき2条件の確認

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

- $p(x) \geq 0$
- $\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} = \left(\frac{1}{0!} + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots \right) \cdot e^{-\lambda} = e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = 1$

ここで、
$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

次ページの補足参照(1回生時に習った筈の「微分積分」を参照)

指数関数の展開公式 (Taylor展開公式より)

$f(x) = e^x$ に対して、 $x=0+\varepsilon$ (ε は微小値) を、
 $x=0$ の周りで Taylor展開すると、

$$f(0+\varepsilon) = f(0) + \frac{\varepsilon}{1!} f'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(0) + \frac{\varepsilon^3}{3!} f^{(3)}(0) + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

$f(x) = e^x$ に対しては、 $f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x, e^0 = 1$

$$\therefore f(\varepsilon) = e^\varepsilon = 1 + \frac{\varepsilon}{1!} + \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^3}{3!} + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} + \dots$$

ポアソン分布の平均

$$\mu = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

パラメータ λ は平均値

$$= \sum_{x=0}^n x \cdot \frac{\lambda \cdot \lambda^{x-1}}{x \cdot (x-1)!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$= 0 \times \underbrace{\frac{\lambda^0}{1}}_{x=0} \cdot e^{-\lambda} + \lambda \times \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$= \lambda \times \sum_{x'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x'}}{x'!} \cdot e^{-\lambda} \quad (x' = x-1 \text{ とおくと } x'=0, \dots)$$

$$= \lambda \times \sum_{x=0}^{\infty} P(\lambda)(x)$$

$$= \lambda$$

ポアソン分布の分散

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot p(x) - \mu^2 \quad \leftarrow \text{復習}$$

$$x^2 = x(x-1) + x \quad \leftarrow \text{技巧 (前回の二項分布のときと全く同じ)}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \{x(x-1) + x\} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \cdot \frac{\lambda^x}{x(x-1) \cdot (x-2)!} \cdot e^{-\lambda} + \mu$$

$$= 0 \times (-1) \times \frac{\lambda^0}{1} \cdot e^{-\lambda} + 1 \times 0 \times \frac{\lambda^1}{1} \cdot e^{-\lambda} + \lambda^2 \times \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \cdot e^{-\lambda} + \mu$$

$$= 0 + \lambda^2 \times \sum_{x'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x'}}{x'!} \cdot e^{-\lambda} + \mu \quad (x' = x-2 \text{ とおくと } x'=0, \dots)$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

ポアソン分布の分散 (続き)

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^n x^2 \cdot p(x) - \mu^2, \quad \mu = \lambda$$

$$\sum_{x=0}^n x^2 \cdot p(x) = \lambda^2 + \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$= \lambda$$

パラメータ λ は分散でもある

二項分布の極限としてのポアソン分布

• 二項分布 $B(n, p)$ の平均と分散:
 $\mu = np, \quad \sigma^2 = np(1-p)$

• ポアソン分布 $P(\lambda)$ の平均と分散:
 $\mu = \lambda, \quad \sigma^2 = \lambda$

の両者を見比べて、もし仮に、

$np \rightarrow \lambda, \quad p \rightarrow 0$ (よって、同時に $n \rightarrow \infty$)

という極限を二項分布 $B(n, p)$ で考えられれば、

それは、ポアソン分布 $P(\lambda)$ に一致する

かも知れない...

つまり、二項分布において、

積 $n \times p$ は、 λ に固定した状況のもとで、

• $p \rightarrow 0$ 各試行では稀にしか起こらないこと
 かつ

• $n \rightarrow \infty$ 試行を無限回繰り返す
 という極限を考えてみる。

例えば、ド・メレ氏が失敗した賭けより、さらにサイコロの数を増やし、投げる回数を増やして、サイコロ4個を864回振って、4個全て6の目となることが少なくとも1回出る確率。二項分布 $B(864, 1/6^4)$

$$n=864, \quad p=1/6^4, \quad np=2/3$$

二項分布が、ポアソン分布に近づくか？例1

- サイコロ1個を4回振って、6の目が出る
 $B(4, 1/6)$, $n = 4, p = 1/6, np = 2/3$
- サイコロ2個を24回振って、6のゾロ目が出る
 $B(24, 1/6^2)$, $n = 24, p = 1/6^2, np = 24/36 = 2/3$
- サイコロ3個を144回振って、3個全てが6の目が出る
 $B(144, 1/6^3)$, $n = 144, p = 1/6^3, np = 144/6^3 = 2/3$
- サイコロ4個を864回振って、4個全てが6の目が出る
 $B(864, 1/6^4)$, $n = 864, p = 1/6^4, np = 864/6^4 = 2/3$
- ...

$P(2/3)$ に近づくか？

ポアソン分布が二項分布のある極限であることの証明

• ある $\Leftrightarrow$

$$np = \lambda \text{ (一定値) のままで、} \\ p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

教科書の第1の証明方法のみ(特性関数は取り上げなかった)ので、第2の証明方法も取り上げない)

$np = \lambda$ (一定値)のままで、 $p \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} B(n, p)(x) &= \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}^{x\text{個}}}{x!} \cdot p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \frac{p^x}{x!} \cdot n^x \times \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{n^x} \times (1-p)^{n-x} \\ &= \frac{(np)^x}{x!} \times 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \times (1-p)^{n-x} \\ &\xrightarrow{np=\lambda, p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^x}{x!} \end{aligned}$$

証明続く

$np = \lambda$ (一定値)のままで、 $p \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} B(n, p)(x) &= \frac{(np)^x}{x!} \times 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \times (1-p)^{n-x} \\ (1-p)^{n-x} &= \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{n \left(1 - \frac{x}{n}\right)} \xrightarrow{np=\lambda, p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\left(\frac{n}{\lambda}\right) \cdot (-\lambda)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \cdot (-\lambda)} = e^{-\lambda} \\ \therefore B(n, p) &\xrightarrow{p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} = P(\lambda) \end{aligned}$$

証明終わり

寄り道: 自然対数の底 e の2つの展開式について

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$e = 2.718281828\dots$

