第４回：二項分布（２回目）

復習：１回の試行（コイン投げ）では、２つの事象（表か裏か）のうちいずれかが、それぞれ pと $1-p$の確率で起こる。それを、n 試行繰り返し行ったとき、表が x 回出る確率：

$$p(x)=\binom{n}{x}\cdot p^x(1-p)^{n-x},\quad x=0,1,2,\cdots,n$$

２つのパラメータ　n（自然数），p $(0<p<1)$ で表される。$x=0,1,2,\ldots,n$ の上で定義された離散確率分布。$B(n,p)$ と書く。

二項分布の４つ目の例：メレ氏の失敗

サイコロ２個を２４回振ったとき、６の「ゾロメ」（２つのサイコロとも６の目）が少なくとも１回出る確率は？　確率分布は$B(24,1/36)$

$$1-p(0)=1-\binom{24}{0}\left(\frac{1}{36}\right)^0\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$
$$=1-0.5085961...=0.49140...$$

となり、０．５より小さい。
つまり、「少なくとも１回出るか、出ないか」のいずれかに賭けるならば、「出ない」確率の方がわずかに高い。
⇒「出る」に賭けた『フランス人貴族ド・メレ氏の失敗』

二項分布の平均と分散

その前に、まず復習：

●階乗

$$n!=n\cdot(n-1)\cdots\cdot 1,\quad 1!=1,\ 0!=1,$$

n の増加とともに、$n!$ は急速（指数関数的）に大きくなる。
$n!$ は、相異なるn 個のもの全てを、順に並べる並べ方の総数。n 個の順列の数。

●組み合わせの数

相異なるn 個の中からx 個を選び出す組み合わせの数。

$$\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\cdot 2\cdot 1}{x\cdot(x-1)\cdots 1\bullet(n-x)\cdots 1}$$
$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\cdot(n-x+1)}{x\cdot(x-1)\cdots 1}$$

二項定理　関連事項

$$(a+b)^n=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}a^x\,b^{n-x}$$

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdots\cdot(a+b)}_{n}$$

a^xb^{n-x}　という項は、全部でn 個ある(　)のうち、x 個の(　)からa を、残りの$n\text{-}x$ 個の(　)からb を選んだときに得られる。このような選び方の数は、「n 個からx 個を選ぶ組み合わせの数」なので、$\binom{n}{x}$
よって、$\binom{n}{x}$ を二項係数とも呼ぶ。

$$(a+b)=a+b$$
$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$
$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

確率分布が満たすべき２条件の確認

- 二項分布を考えるときの重要な仮定は、

n 回繰り返し行う試行が、いずれも同一で互いに独立であること ⇔ ベルヌーイ試行という

$$p(x)=\binom{n}{x}\cdot p^x(1-p)^{n-x},\quad x=0,1,2,\cdots,n$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ p(x)\geq 0\\ \bullet\ \sum_{x=0}^{n}p(x)=1\end{array}\right\}\ \text{確率関数が満たすべき２式}$$

$$\because\ \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\left(p+(1-p)\right)^n=1^n=1$$

さて、やっと…二項分布の平均

$$\mu = \sum_{x=0}^{n} x \cdot p(x)$$
$$= \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot p^x (1-p)^{n-x}$$
$$= \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{x \cdot (x-1)!(n-x)!} \cdot p^x (1-p)^{n-x}$$
$$= \underbrace{0 \times p^0 (1-p)^n}_{x=0} + n \times \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} \cdot p^x (1-p)^{n-x}$$
$$= \underbrace{0}_{x=0} + n \times p \times \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\big((n-1)-(x-1)\big)!} \cdot p^{x-1} (1-p)^{(n-1)-(x-1)}$$
$$= np \times \sum_{x'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{x'!\big((n-1)-x'\big)!} \cdot p^{x'} (1-p)^{n-1-x'} \quad (x' = x-1 \text{とおくと} x' = 0, \ldots, n-1)$$
$$= np \times \sum_{x=0}^{n-1} B(n-1, p)(x)$$
$$\boxed{= np}$$

毎回pの確率で生起することを、n回互いに独立な試行として繰り返す。よって合計の生起回数の平均は、

$p + p + p + \ldots p = np$

同様にして…二項分布の分散

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2 \cdot p(x) - \mu^2 \qquad \leftarrow \text{復習}$$
$$x^2 = x(x-1) + x \qquad \leftarrow \text{技巧}$$
$$\sum_{x=0}^{n} x^2 \cdot p(x) = \sum_{x=0}^{n} \{x(x-1) + x\} \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot p^x (1-p)^{n-x}$$
$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \cdot \frac{n(n-1) \cdot (n-2)!}{x(x-1) \cdot (x-2)!(n-x)!} \cdot p^x (1-p)^{n-x} + \mu$$
$$= \underbrace{0 \times (-1) \times p^0 (1-p)^n}_{x=0} + \underbrace{1 \times 0 \times np(1-p)^{n-1}}_{x=1} + n(n-1) \times \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} \cdot p^x (1-p)^{n-x} + \mu$$
$$= \underbrace{0}_{x=0,1} + n(n-1) \times p^2 \times \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!\big((n-2)-(x-2)\big)!} \cdot p^{x-2} (1-p)^{(n-2)-(x-2)} + \mu$$
$$= n(n-1)p^2 \times \sum_{x'=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{x'!\big((n-2)-x'\big)!} \cdot p^{x'} (1-p)^{n-2-x'} + \mu \quad (x' = x-2 \text{とおくと} x' = 0, \ldots, n-2)$$
$$= n(n-1)p^2 \times \sum_{x=0}^{n-2} B(n-2, p)(x) + \mu$$
$$= n(n-1)p^2 + \mu$$

二項分布の分散(続き)

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2 \cdot p(x) - \mu^2, \quad \mu = np$$
$$\sum_{x=0}^{n} x^2 \cdot p(x) \;\; = n(n-1)p^2 + \mu$$
$$\sigma^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2$$
$$= np - np^2$$
$$\boxed{= np(1-p)}$$

前回の問題:以下の2つの確率を求めなさい。

問1:サイコロ1個を4回振ったとき、6の目が少なくとも1回出る確率を求めなさい。確率分布は$B(4,1/6)$

$\rightarrow 1 - p(0) = 1 - \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - 0.482253086\ldots = 0.51774\ldots > 0.5$

問2:サイコロ2個を24回振ったとき、6の「ゾロメ」が少なくとも1回出る確率を求めなさい。確率分布は$B(24,1/36)$

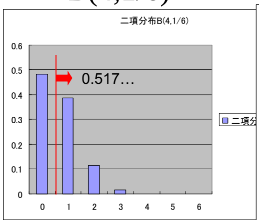
$\rightarrow 1 - p(0) = 1 - \binom{24}{0}\left(\frac{1}{36}\right)^0\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 1 - 0.5085961\ldots = 0.49140\ldots < 0.5$

問3:出る回数の平均μ=np は、4 x 1/6 =24 x 1/36 =2/3 より2つの分布で等しい。しかし、「少なくとも1回出るか、出ないか」のいずれかに賭けるならば、問1は、「出る」確率の方が、問2は「出ない」確率の方が、いずれも差はわずかながら、高い。

⇒ パスカルとフェルマーが往復書簡で議論し、確率論の創始へ。

2つの二項分布をグラフで比較すると

$B(4,1/6)$



$B(24,1/36)$