よく使う公式（分散の計算に便利）

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sum_x (x-\mu)^2 \cdot p(x) \\
&= \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) \cdot p(x) \\
&= \sum_x x^2 \cdot p(x) - \mu^2
\end{aligned}
$$

分散は、x^2の平均 ー 平均の2乗

連続分布の場合にも、同様の式を立てて確認せよ。

第3回： 二項分布（１回目）

ゲームに始まる二項分布

「コインを3回投げたとき、表が出る回数は何回か？」

・表が出る回数：確率変数 $x=0,1,2,3$　つまり離散分布
・3回投げたときの{表、裏}の出かたは、
　{裏裏裏}{表裏裏}{裏表裏}{裏裏表}…{表表表}
　の8通り （列挙せずとも、2³＝8で求められるように）
・$x=0$：1通り、$x=1$：3通り、$x=2$：3通り、$x=3$：1通り
　（計算方法は？→次で）

1回投げて表が出る確率 $p=1/2$（つまり裏も$1/2$）
とすると、8通りの出かたはいずれも同じ確率で

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=\frac{1}{\text{出かたの総数}}$$

よって、

$$p(x)=\frac{\text{3回のうち}x\text{回が表となる場合の数}}{\text{3回の表裏の出かたの総数}}$$

つまり、

$$p(0)=\frac{1}{8},\ p(1)=\frac{3}{8},\ p(2)=\frac{3}{8},\ p(3)=\frac{1}{8}$$

分子の「3回のうち x 回が表になる場合の数」
の計算方法は？ →次で

組み合わせの数(Combinations)

一般に、
- n 個から x 個を選ぶ場合の数
- n 個から x 個を選ぶ組み合わせの数

$_nC_x$ あるいは $\binom{n}{x}$ と書いて、具体的には、

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{x} &= \frac{n!}{x!(n-x)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1}{x\cdot(x-1)\cdots 1 \bullet (n-x)\cdots 1} \\
&= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-x+1)}{x\cdot(x-1)\cdots 1}
\end{aligned}
$$

ここで、階乗 $n! = n\cdot(n-1)\cdots 1,\quad 1!=1,\quad 0!=1,$

そこで、最初の問題に戻って

「3回のうち何回くらいか…？」

確率分布： $p(x)=\frac{1}{2^3}\times\binom{3}{x},\quad x=0,1,2,3$

平均： $\mu = \sum_{x=0,1,2,3} x\cdot p(x) \quad = \frac{3}{2}$

$$p(x)=B(3,\frac{1}{2}),\quad x=0,1,2,3$$

一般の二項分布(Binomial distribution)

1回の試行（コイン投げ）では、2つの事象（表か裏か）のうちいずれかが、それぞれ pと$1-p$の確率で起こる。それを、n 試行繰り返し行ったとき、表が x 回出る確率：

$$p(x)=\binom{n}{x}\cdot p^x(1-p)^{n-x},\quad x=0,1,2,\cdots,n$$

2つのパラメータ　n（自然数）, p $(0<p<1)$
で表される。$x=0,1,2,\ldots,n$ の上で定義された離散確率分布。$B(n, p)$ と書く。

二項分布の2つ目の例

まず、「サイコロを2個振ったとき、出る目の数の合計は、偶数（丁）か奇数（半）か？」

1回振って、丁となる確率

＝合計が2となる確率$p(2)$＋4となる確率$p(4)$＋$p(6)+p(8)+p(10)+p(12)$

$= \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 1+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 3+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 5+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 5+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 3+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 1$

＝18/36＝　1/2

同様に、半となる確率＝1/36･(2+4+6+4+2)＝1/2

そこで

「10回振って、丁となる回数は？」

- サイコロ2個を10回振ったとき、そのうち丁となる回数 x は、$B(10,1/2)$に従う。

確率分布：$p(x)=B\left(10,\frac{1}{2}\right)$　　$x=0,1,2,\cdots,10$

$$=\binom{10}{x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-x}=\frac{1}{2^{10}}\cdot\binom{10}{x}$$

平均：$\mu=\sum_{x=0}^{10} x\cdot p(x)$

$\mu=np\ (=10\times0.5=5)$

$\sigma^2=np(1-p)\ (=10\times0.5\times0.5=2.5)$

は、次回に証明する。

$$p(x)=B\left(10,\frac{1}{2}\right)(x)=\frac{1}{2^{10}}\cdot\binom{10}{x}$$

x = 5を中心に対象な分布

$$p(0)=\frac{1}{2^{10}}\frac{10!}{0!\cdot 10!}=\frac{1}{2^{10}}=p(10)$$

$$p(1)=\frac{1}{2^{10}}\frac{10!}{1!\cdot 9!}=\frac{1}{2^{10}}\cdot 10=p(9)$$

$$p(2)=\frac{1}{2^{10}}\frac{10!}{2!8!}=\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}=\frac{1}{2^{10}}\cdot 45=p(8)$$

$$p(3)=\frac{1}{2^{10}}\frac{10!}{3!7!}=\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{2^{10}}\cdot 120=p(7)$$

$$p(4)=\frac{1}{2^{10}}\frac{10!}{4!6!}=\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{2^{10}}\cdot 210=p(6)$$

$$p(5)=\frac{1}{2^{10}}\frac{10!}{5!5!}=\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{2^{10}}\cdot 252$$

二項分布の3つ目の例

まず、「サイコロ1個を振ったときに、1の目が出る確率は？」→ p=1/6

そこで、「サイコロ1個を30回振ったとき、1の目が出る回数は何回か？」

1の目が出る回数 $x=0,1,\ldots,30$：確率変数

その確率分布　$p(x)=B\left(30,\frac{1}{6}\right)$　　$x=0,1,2,\cdots,30$

$$=\binom{30}{x}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{30-x}=\frac{5^{30-x}}{6^{30}}\cdot\binom{30}{x}$$

自分で電卓などを使って、おおよそのグラフを書いてみよう。

宿題：次回（5/2）提出

授業中に出てきた、以下を計算で導出しなさい。

1．幾何分布「複数回コイン投げ」での平均と分散

$p(x)=(1-p)^{x-1}\bullet p,\quad x=1,2,3,\ldots$　に対して、

（x 回目に表が出る確率 $p(x)$，p：1回のコイン投げで表が出る確率）

$\mu=\sum_{x} x\cdot p(x)=\frac{1}{p}$　　$\sigma^2=\sum_{x}(x-\mu)^2\cdot p(x)=\frac{1-p}{p^2}$

2．指数分布での平均と分散

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & (t\geq 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$　に対して、

$\mu=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\frac{1}{\lambda}$　　$\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot f(x)dx=\frac{1}{\lambda^2}$