第13回: 検定・推定の実際

母集団と標本:得られたデータを、「標本」と捉える。
⇒標本の平均や分散は、確率変数

統計学の目的:標本の性質を調べて、そこから母集団の性質を推定すること

母集団の性質:特性量である母平均や母分散に対して仮説を立てて検定し、また推定する

検定・推定の考え方

- 検定・推定:母集団の性質(特性量)を直接調べられない場合に、標本をとってきて、その性質(特性量)を調べ、その結果に基づいて、もとの母集団の性質(特性量)を推測する。
  - 世論調査などのサンプリング調査や、物理や化学の実験も、ある意味ではその例。
- 標本の特性量は確率変数。ある標本分布に従う。よって、推測結果も確率的なものとなる。

検定(仮説検定)

母集団の特性を推測する代表的な方法

母集団の性質について、1つの仮説(命題)を立てる。

標本の性質を調べ、調べた結果に基づいて、立てた仮説を否定する(棄却する)か、否定しない(棄却しない)かを、ある確率のもとで、判定する。

テキストp.103 例題7.1

求めたい母集団の性質:
このサイコロを振ったときに偶数の目が出る確率 p

・仮説H_0: $p=1/2$
いかさまサイコロではなく、公平なサイコロである、ならばそうなる。
・対立仮説H_1 : $p\neq 1/2$

仮説H_0 のもとで、「標本平均=3/5」⇔「偶数の目が出る回数が60回」となる確率を求める。

仮説H_0 のもとでは、サイコロを1回振ったときに偶数の目が出る確率は1/2。よって、

100回振ったとき偶数の目が出る回数yは、確率変数であり、二項分布 $B(n=100, p=1/2)$に従う。

二項分布$B(n=100, p=1/2)$の平均 $\mu=np=50$,

分散$\sigma^2=np(1-p)=25$ 。n が大きく $p=1/2$ のため、これは、同じ平均 $\mu=50$, 分散$\sigma^2=25$ (標準偏差$\sigma=5$)の正規分布$N(\mu=50,\ \sigma^2=25)$で近似できる。

そこで、正規分布$N(50, 25)$に従う確率変数 y がとる値の範囲を考える。

正規分布$N(\mu=50,\ \sigma^2=25)$に従う確率変数yがとる値の範囲を考える。正規分布表より、

80%の確率で、 $\mu-1.282\sigma \le y \le \mu+1.282\sigma$

90%の確率で、 $\mu-1.645\sigma \le y \le \mu+1.645\sigma$

95%の確率で、 $\mu-1.96\sigma \le y \le \mu+1.96\sigma$

99%の確率で、 $\mu-2.576\sigma \le y \le \mu+2.576\sigma$

いま $\mu=50,\ \sigma=5$ より、

80%の確率で、 $43.6 \le y \le 56.4$

90%の確率で、 $41.8 \le y \le 58.2$

95%の確率で、 $40.2 \le y \le 59.8$

99%の確率で、 $37.1 \le y \le 62.9$

$y<40.2$ または $y>59.8$ となる確率は5%

仮説H_0 のもとでは、
y<40.2 または y>59.8 となる確率は5%
⇔ y=60とは、5%以下の確率のことが起こったことになる。

⇔「 y=60であることを根拠として、
仮説H_0 は否定される；仮説H_0 は棄却される」
との判定が、誤りである確率は5%
⇔仮説H_0 は、有意水準（あるいは危険率）5%で棄却される、という。
y<40.2 または y>59.8 の領域を、棄却域という。
有意水準は、5%にとることが多い。この例の場合
有意水準を1%にとると、仮説H_0は棄却されない。

母集団比率pの検定

仮説H_0, H_1を、$H_0: p = p_0$, $H_1: p \neq p_0$ としたとき、
有意水準 α に対して

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \right| > K_{\alpha/2}$$

のとき、仮説H_0 は棄却される。

仮説H_0のもとでは、確率変数 $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$ は、近似的に
平均 np_0 、標準偏差 $\sqrt{np_0(1-p_0)}$
の正規分布N(np_0 , $np_0(1-p_0)$) に従う、ことに基く。

区間の推定

テキストp.107 例題7.2

そこで、(p_0 ではなさそうな本当の) p の値を推定しよう。このとき、やはり確率変数 $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$ は、
平均 np、標準偏差 $\sqrt{np(1-p)}$ の二項分布 $B(n, p)$
に従う。よってまた、近似的に
正規分布N(np , $np(1-p)$) に従う。よって、

$$\mathrm{Prob}\left\{ \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right| < K_{\alpha/2} \right\} = 1-\alpha$$

100回サイコロを振ったところ60回偶数の目が出た、という結果から得られた確率 $\hat{p}$ は、その100回による標本平均であり、やはり確率変数であって、
$\hat{p} = \frac{y}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ と書ける。前ページの $\mathrm{Prob}\left\{ \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right| < K_{\alpha/2} \right\} = 1-\alpha$

より、$\mathrm{Prob}\left\{ \left| \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \right| < K_{\alpha/2} \right\} = 1-\alpha$

よって、$\mathrm{Prob}\left\{ |\hat{p}-p| < K_{\alpha/2} \cdot \sqrt{p(1-p)/n} \right\} = 1-\alpha$ 。つまり、

確率 1-α で、$\hat{p} - K_{\alpha/2} \cdot \sqrt{p(1-p)/n} < p < \hat{p} + K_{\alpha/2} \cdot \sqrt{p(1-p)/n}$ となる。

$$\mathrm{Prob}\left\{ |\hat{p}-p| < K_{\alpha/2} \cdot \sqrt{p(1-p)/n} \right\} = 1-\alpha$$

いま、既知の $\hat{p}$ から p を推定しようとしている。
そこで、上記の不等式において、√の中の pを $\hat{p}$ で置き換えることにする。これは、未知の p を既知の $\hat{p}$ で近似したことに他ならない（n が十分大きければ、近似できる）。

$$\boxed{\hat{p} - K_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} < p < \hat{p} + K_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}}$$

信頼度1－α での、母集団比率 p の区間推定

例題の場合には、α=0.05に対して、0.6-0.096 < p < 0.6+0.096

テキストp.108 例題7.3

内閣支持率 p を精度±2%以内で推定するためには、標本の大きさ（数） n を何人以上にすればよいか。
信頼度1－α =95%で考えよ。

$$K_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} \le 0.02$$

ただし、$\alpha = 0.05$ より $K_{\alpha/2} = 1.96$

$\therefore\ n \ge \left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2 \cdot \hat{p}(1-\hat{p})$ ここで、$\hat{p}(1-\hat{p}) \ge \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ $\left(\hat{p} = \frac{1}{2}\text{のとき}\right)$

$\therefore\ n \ge \left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 49^2 = 2401$ よって、2401人以上